Übungsklausur Analysis & Geometrie (Regenfässer)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

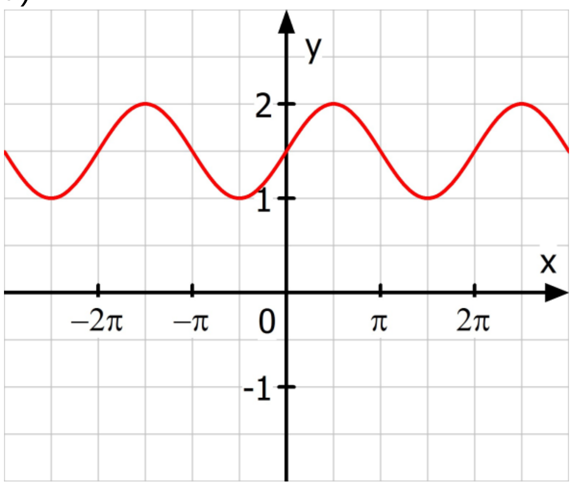
1) a) Leite die Funktion $f(x)=\frac{1}{8}\sin(4x^2)$ ab.

b) Bestimme die Stammfunktion von $f(x)=-4\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$,

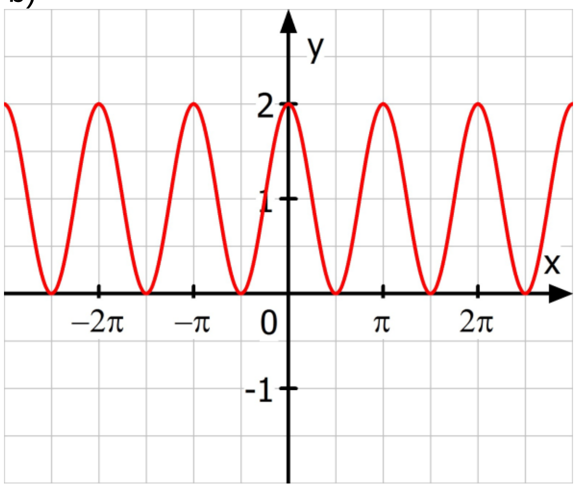
die durch den Punkt P(0|10) verläuft. (4VP)

2) Gib einen passenden Funktionsterm an. (4VP)

a)



b)



3) Löse die Gleichung $2\sin(x)-\sin(x)\cdot\cos(x)=0$ für $0\le x\le 2\pi$. (3VP)

4) Für welches k hat der Graph der Funktionenschar $f_k(x)=k\cdot\cos(x)-k\sin(x)$ ($x\in\mathbb{R};\ k\in\mathbb{Z}$) im Ursprung die gleiche Steigung wie der Graph der Funktion $g(x)=2x^3+3x$? (3VP)

5) Gegeben ist die Ebene $E: x_1+x_2=4$ und die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

a) Zeichne die Ebene in einem Koordinatensystem.
b) Untersuche die gegenseitige Lage von g und E. (3VP)

6) Gegeben sind die Ebene $E: 3x_1-4x_3=-7$ und der Punkt $P(9\,|-4\,|\,1)$.
a) Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.
b) Der Punkt $S(-1|1|1)$ liegt auf E. Bestimme den Punkt Q auf der Geraden durch S und P, der genauso weit von E entfernt ist wie P. (4VP)

7) Gegeben sind die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\9\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\-8\\2\end{pmatrix}$, $s,t\in\mathbb{R}$.

Bestimme den Abstand der beiden Geraden. (4VP)

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Regenfässer)

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Aufgabe 1

Nach der Neugestaltung des Schulhofes im Rahmen des Aula Neubaus will die Bio- und Schulgarten AG des St. Ursula Gymnasiums ihre frisch angelegten Blumenbeete in Zukunft nur noch mit Wasser versorgen, das aus speziell dafür vorgesehenen Regenfässern stammt.

In Fass 1 sind zu Beginn des Befüllens durch starke Regenfälle in der vergangenen Nacht bereits 150 Liter Wasser enthalten. Nach bereits 25 Minuten ist das Fass, das ein maximales Fassungsvermögen von 1200 Litern hat, bereits zu Dreiviertel gefüllt. Das Befüllen von Fass 1 kann durch die Funktion f mit

$f(t) = a \cdot e^{kt}$ (t: Zeit in Minuten, f(t): Füllmenge in Litern) beschrieben werden.

(1) Bestimme a und k. (Teilergebnis: $f(t) = 150 \cdot e^{0{,}072 \cdot t}$)

(2) Wie viel Wasser befindet sich nach 6 Minuten in Fass 1?

(3) Wann würde Fass 1 überlaufen, wenn nicht rechtzeitig die Wasserzufuhr abgestellt wird?

Aufgabe 2

Gegeben ist für jedes $a \neq 0$ eine Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(\pi x) - \pi x$.

(1) Untersuche f_1 auf Monotonie.
Was lässt sich damit über die Existenz von Extremstellen aussagen?

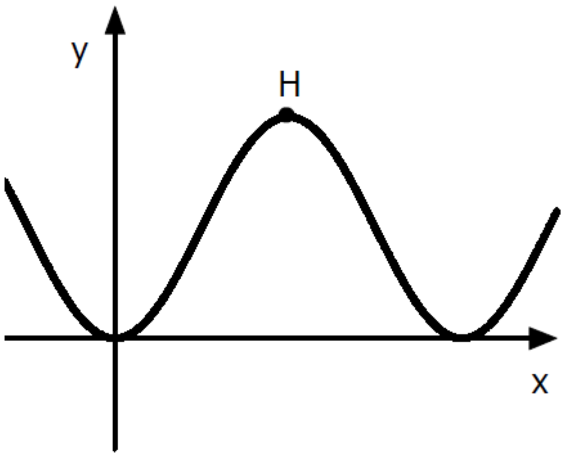
(2) Zeige, dass $\int_0^2 f_a(x)dx$ unabhängig von a ist.

Aufgabe 3

Abgebildet ist ein Teil des Graphen der Funktion g
Mit $g(x) = (\sin(x))^2$.

(1) Bestimme die exakten Koordinaten des Hochpunktes H.

(2) Es gibt reelle Zahlen a, b, d, so dass gilt:
$g(x) = a \cdot \cos(bx) + d$
Bestimme diese Zahlen.



Übungsklausur Analysis & Geometrie (Regenfässer)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x) = \frac{1}{8}\cos(4x^2) \cdot 8x = \cos(4x^2) \cdot x$ (2P)

b) $F(x) = 8 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c$ (1P)

$F(0) = 10 \Leftrightarrow 10 = 8 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} + c \Leftrightarrow 10 = 8 + c \Leftrightarrow c = 2 \quad \Rightarrow F(x) = 8 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 2$ (1P) **4P**

2) a) $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x) + 1{,}5$ (2P) b) $f(x) = \cos(2x) + 1$ (2P) **4P**

3) $\sin(x) \cdot (2 - \cos(x)) = 0$

$\sin(x) = 0$ oder $\cos(x) = 2$

$x_1 = 0; x_2 = \pi; x_3 = 2\pi$ **3P**

4) $f_k'(x) = -k \cdot \sin(x) - k\cos(x) \Rightarrow f_k'(0) = -k$

$g'(x) = 6x^2 + 3 \Rightarrow g'(0) = 3$

Für $k = -3$ haben beide Graphen die gleiche Steigung im Ursprung. **3P**

5) a) Spurpunkte $S_1(4\,|\,0\,|\,0); S_2(0\,|\,4\,|\,0)$ und parallel zur x_3 – Achse (1,5P)

b) g in E einsetzen: $1 + t + 3 + t = 4 \Leftrightarrow 4 + 2t = 4 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \boxed{S(1\,|\,3\,|\,3)}$ (1,5P) **3P**

6) a) HNF: $E: \left|\frac{3x_1 - 4x_3 + 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = 0 \quad d(P;E) = \left|\frac{3 \cdot 9 - 4 \cdot 1 + 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \left|\frac{30}{5}\right| = 6$ (2P)

b) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2P) **4P**

7) Abstand Punkt $P(1\,|\,2\,|\,5)$ zur Geraden g:

Hilfsebene H: $3x_1 - 4x_2 + x_3 = b$ (senkrecht zu h durch P)

$3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 = b \Leftrightarrow b = 0 \quad \Rightarrow H: 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$ (1P)

Schnittpunkt von H und Gerade g: (g in H)

$3(2 + 3s) - 4(9 - 4s) + 4 + s = 0 \Leftrightarrow 6 + 9s - 36 + 16s + 4 + s = 0 \Leftrightarrow 26s = 26 \Leftrightarrow \boxed{s = 1}$

$\Rightarrow S(5\,|\,5\,|\,5)$ (2P)

$d(g,P) = d(g,h) = \left|\begin{pmatrix} 5-1 \\ 5-2 \\ 5-5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (1P) **4P**

Summe: 25 Punkte

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Regenfässer)

Lösungen Wahlteil:

Aufgabe 1

(1) $f(0)=150 \Rightarrow a=150$

$1200\cdot\frac{3}{4}=900 \Rightarrow 900=150\cdot e^{25\cdot k} \Leftrightarrow 6=e^{25\cdot k} \Leftrightarrow k=\frac{\ln 6}{25}\approx 0{,}072$

$f(t)=150\cdot e^{0{,}072\cdot t}$

(2) $f(6)=231{,}05$. Nach 6 Minuten sind 231,05 Liter in Fass 1.

(3) $1200=150\cdot e^{0{,}072\cdot t} \Leftrightarrow 8=e^{0{,}072\cdot t} \Leftrightarrow t=\frac{\ln 8}{0{,}072}\approx 28{,}88$.

Fass 1 würde nach 28,9 Minuten überlaufen.

Aufgabe 2

(1) $f_1'(x)=\pi\cdot\underbrace{\cos(\pi x)}_{\text{zwischen }-1\text{ und }1}-\pi\le 0 \Rightarrow$ Schaubild von f ist monoton fallend

$\Rightarrow$ keine Extrempunkte

(2) $\int_0^2 f_a(x)dx=\left[-\frac{1}{a\pi}\cos(\pi x)-\frac{1}{2}\pi x^2\right]_0^2=-\frac{1}{a\pi}\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}-2\pi-\left(-\frac{1}{a\pi}\underbrace{\cos(0)}_{=1}-0\right)=-2\pi$

Ergebnis ist unabhängig von a.

Aufgabe 3

(1) $g'(x)=2\sin(x)\cos(x)=0$

$\Rightarrow \sin(x)=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=\pi; x_3=2\pi$ oder $\cos(x)=0 \Rightarrow x_4=\frac{1}{2}\pi; x_5=\frac{3}{2}\pi$

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die x-Koordinate von H die kleinste positive Nullstelle von g' ist, also $\boxed{x=\frac{1}{2}\pi} \Rightarrow \boxed{H\left(\frac{1}{2}\pi\,|\,1\right)}$

(2) $T(0\,|\,0), H\left(\frac{\pi}{2}\,|\,1\right) \Rightarrow \boxed{d=\frac{1}{2}; a=-\frac{1}{2}}$ und $p=\pi \Rightarrow b=\frac{2\pi}{\pi} \Leftrightarrow \boxed{b=2}$